环 境 遥 感
第7卷 第4期 REMOTE SENSING OF ENVIRONMENT Vol. 7, No. 4
1992年11月 CHINA Nov., 1992

匀速直线运动降质图像复原中的误差改善

朱 昱 王春涛 刘政凯
(中国科技大学无线电电子学系,信息处理中心,)

1991年9月10日收稿

摘 要

周期性误差是匀速直线运动降质图像复原中普遍存在的现象，它严重影响复原图像质量。本文针对几种典型的复原方法，给出了复原图像周期性误差的定量分析，并在此基础上提出了两种分别从频率域和空间域出发的改善误差方法。实验结果表明，这两种方法对复原图像中周期性误差的消除有普遍意义。

关键词 图像复原 周期性误差 误差改善

用于复原匀速直线运动降质图像的方法已有多种，但复原图像中或多或少地都存在周期性误差，如果能从图像中去除这种误差，则复原图像的质量将得到大幅度提高。

一、误 差 分 析

1. 逆滤波

匀速直线运动的降质模型可表示为:

$$g(n)=\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{a-1}f(n-i) \qquad 0\leqslant n\leqslant L-1 \tag{1}$$

其中 f，g 分别为原始图像和降质图像。(不失一般性，假定运动只发生在 X 方向，这里 L 为图像在 X 方向的大小，a 为曝光期间图像移动距离)。

逆滤波复原过程可表示为[1]

$$G(u)=F(u)\cdot H(u) \tag{2}$$

式中 $F(u)$，$G(u)$ 分别为原始图像和降质图像频谱。

$$H(u)=\frac{1}{a}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{L}ua}{\sin\frac{\pi}{L}u}\exp\left[-j\frac{\pi}{L}u(1-a)\right] \tag{3}$$

定义 $\hat{F}(u)$ 为复原图像频谱，$E_L(u)=F(u)-\hat{F}(u)$，显然 $E_L(u)$ 即为误差函数频谱。由(1)式得

$$\hat{F}(0)=\sum_{n=0}^{L-1}g(n)=\sum_{n=0}^{L-1}\left[\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{a-1}f(n-i)\right]=\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{a-1}\sum_{n=0}^{L-1}f(n-i)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot a \sum_{n=0}^{L-1} f(n) = F(0)$$

$$\therefore E_L(0) = 0$$

当 $H(u) \neq 0$ 时，$\hat{F}(u) = \dfrac{G(u)}{H(u)} = F(u)$

$$E_L(u) = 0$$

而当 $u = \dfrac{nL}{a}$ $(n \in [1, a-1])$ 时，$H(u) = 0$，$\hat{F}(u)$ 不能直接算出，令此时的

$$E_L(u) = F(u) - \hat{F}(u) = E_a(n) \quad (n \in [1, a-1])$$

所以有 $$E_L(u) = \begin{cases} E_a(n), & u = \dfrac{nL}{a} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{4}$$

对上式作 IDFT 变换，
$$e(i) = \sum_{n=0}^{L-1} E_L(u) \exp\left[j \frac{2\pi}{L} ui\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{a-1} E_a(n) \exp\left[j \frac{2\pi}{a} ni\right] \tag{5}$$

式中 $i \in [0, L-1]$，为推导方便，令 $L = Ka$

令 $$i = ma + k, \ k \in [0, a-1], \ m \in [0, K-1] \tag{6}$$

将(6)式代入(5)式，有

$$e(ma + k) = \sum_{n=0}^{a-1} E_a(n) \exp\left[j \frac{2\pi}{a} n(ma + k)\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{a-1} E_a(n) \exp\left[j \frac{2\pi}{a} nk\right] = e(k)$$

又因为 $$E_a(0) = \sum_{k=0}^{a-1} e(k) = 0 \tag{7}$$

得到结论 1：逆滤波复原图像存在周期为 a 的周期性误差干扰，且单周期内误差函数之和为零。

2. 状态空间法

状态空间复原模型为：
$$y(k+1) = Ay(k) + Bg(k)$$
$$f(k) = Cy(k) + Dg(k) \qquad k \in [0, L-1] \tag{8}$$

式中 $y(k)$ 为 a 维状态向量，$g(k)$ 为系统输入，$f(k)$ 为系统输出，A、B、C 分别为阶数 $(a \times a)$,$(a \times 1)$,$(1 \times a)$的常数矩阵，D 为标量。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = [0, 0, \cdots, 0, a]^T$$

$$C = [0,-1,-1,\cdots,-1] \qquad D = a$$

当初始状态 $y(0)$ 与状态空间降质模型初始状态相同时，可由(8)式完全复原出原始图像，但降质模型初始状态未知，因此对它的估计必然存在误差。

设
$$e = y(0) - \hat{y}(0) \tag{9}$$

e 表示初始状态误差向量，其中第 i 个元素用 $ee(i)$ 表示，$i \in [0, a-1]$

把(9)式代入(8)式，有

$k=0$ 时，
$$\begin{aligned}
\hat{y}(1) &= A\hat{y}(0) + Bg(0) \\
&= A[y(0) - e] + Bg(0) \\
&= y(1) - Ae \\
\hat{f}(0) &= c\hat{y}(0) + Dg(0) \\
&= f(0) - Ce
\end{aligned}$$

$k=1$ 时，
$$\begin{aligned}
\hat{y}(2) &= y(2) - AAe \\
\hat{f}(1) &= f(1) - CAe
\end{aligned}$$

$k=2$ 时，
$$\begin{aligned}
\hat{y}(3) &= y(3) - AAAe \\
\hat{f}(2) &= f(2) - CAAe \\
&\vdots
\end{aligned}$$

递推得一般表达式，$k = m$ 时，$\hat{y}(m+1) = y(m+1) - C\overbrace{AA\cdots A}^{m+1\text{个}}e$

$$\hat{f}(m) = f(m) - C\overbrace{AA\cdots A}^{m\text{个}}e \tag{10}$$

定义 $\Delta(m) = f(m) - \hat{f}(m)$

由(10)式知，$\Delta(m) = C\overbrace{AA\cdots A}^{m\text{个}}e \quad m \in [0, L-1]$ (11)

直接进行矩阵乘法可得，
$$\begin{aligned}
C &= (0,-1,-1,\cdots,-1) \\
CA &= (0,1,0,\cdots,0) \\
CAA &= (0,0,1,0,\cdots,0) \\
&\vdots \\
C\overbrace{AA\cdots A}^{a-1\text{个}} &= (0,0,0,\cdots,0,1) \\
C\overbrace{AAA\cdots A}^{a\text{个}} &= (0,-1,-1,\cdots,-1) = C
\end{aligned} \tag{12}$$

一般有 $L = Ka$

如令 $m = i + ka$，考虑(12)式有 $\Delta(i+ka) = \Delta(i) \quad i \in [0, a-1]$。 (13)

由(11)、(12)式及 e 向量表示，有

$$\begin{aligned}
\Delta(0) &= -\sum_{i=1}^{a-1} ee(i) \\
\Delta(1) &= ee(1) \\
\Delta(2) &= ee(2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\Delta(a-1)=ee(a-1)$$

显然
$$\sum_{i=0}^{a-1}\Delta(i)=0 \tag{14}$$

因此,结论 2：状态空间法复原图像中存在周期为 a 的周期性误差，且单周期内误差函数之和为零。

3. 差分法

D. Slepian[2] 给出了差分法复原递推公式：

如 $n=i+ma$，则

$$f(i+ma)=\sum_{k=0}^{m}g'(i+ka)+\Phi(i) \tag{15}$$

式中 $n\in[0,L-1]$，$i\in[0,a-1]$，$m\in[0,K-1]$，$L=Ka$

M. M. Sondhi[3] 给出了 $\Phi(i)$ 的准确表达式：

$$\Phi(i)=\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1}f(i+ma)-\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1}\sum_{k=0}^{m}g'(i+ka) \tag{16}$$

(16)式中第一项未知,但它当K较大时趋向于 f 的平均值,因此可近似地将其看作常数A。

将(16)式代入(15)式,得

$$f(i+ma)=\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1}f(i+ma)-\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{K-1}\sum_{k=0}^{l}g'(i+ka)+\sum_{k=0}^{m}g'(i+ka) \tag{17}$$

$$\sum_{i=0}^{a-1}f(i+ma)=\sum_{i=0}^{a-1}\left[\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1}f(i+ma)\right]+\sum_{i=0}^{a-1}\left\{\sum_{k=0}^{m}g'(i+ka)-\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{K-1}\sum_{k=0}^{l}g'(i+ka)\right\} \tag{18}$$

(18)式中右边第二项自变量为 m，令其为 $Q(m)$，

又　∵
$$g(n)=\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{a-1}f(n-i)$$

(18)式写为，

$$a\cdot g[(m+1)a-1]=\sum_{i=0}^{a-1}\left[\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1}f(i+ma)\right]+Q(m)$$

$$\sum_{i=0}^{a-1}\left[\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1}f(i+ma)\right]=a\cdot g[(m+1)a-1]-Q(m)$$

$$a\cdot A=a\cdot g[(m+1)a-1]-Q(m)$$

$$A=g[(m+1)a-1]-\frac{Q(m)}{a}$$

复原图像为
$$\hat{f}(i+ma)=\sum_{k=0}^{m}g'(i+ka)+A-\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1}\sum_{k=0}^{m}g'(i+ka)$$

定义误差函数
$$e(n)=f(n)-\hat{f}(n)$$

$$e(i+ma)=f(i+ma)-\hat{f}(i+ma)=\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1}f(i+ma)-A=e(i)$$

$$\sum_{i=0}^{a-1} e(i) = \sum_{i=0}^{a-1}\left[\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1} f(i+ma)\right] - \sum_{i=0}^{a-1} A$$
$$= \sum_{i=0}^{a-1}\left[\frac{1}{K}\sum_{m=0}^{K-1} f(i+ma)\right] - a\cdot A = 0$$

结论 3：差分法复原图像中存在周期为 a 的周期性误差，且单周期内误差函数之和为零。

二、误差改善方法

上面给出逆滤波、状态空间法、差分法复原图像误差的定量分析，可以发现，误差函数均为以 a 为周期的周期性误差，且单周期内误差之和均为零，因此可以做如下的设定：

$f(n)$ 代表原始图像，$\hat{f}(n)$ 代表复原图像，误差函数为 $e(n) = f(n) - \hat{f}(n)$。

如 $n = i + ma$，有 $c(i+ma) = c(i)$ 且 $\sum_{i=0}^{a-1} e(i) = 0$

式中 $m \in [0, K-1]$，$i \in [0, a-1]$，$L = Ka$

1. 频域误差改善方法

误差函数 $e(n)$ 的 DFT 变换：

$$E_L(u) = \sum_{i=0}^{L-1} e(i)\exp\left[-j\frac{2\pi}{L}ui\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{a-1}\sum_{m=0}^{K-1} e(i+ma)\exp\left[-j\frac{2\pi}{L}u(ma+i)\right]$$
$$= \sum_{m=0}^{K-1}\exp\left[-j\frac{2\pi}{L}uma\right]\sum_{i=0}^{a-1} e(i)\exp\left[-j\frac{2\pi}{L}ui\right]$$
$$= \begin{cases} KE_a(u/K), & u = 0, K, 2K, \cdots (a-1)K \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

式中 $E_a(u) = \sum_{i=0}^{a-1} e(i)\exp\left[-j\frac{2\pi}{a}ui\right]$，$E_a(0) = 0$

根据误差函数定义，有

$$\hat{F}(u) = F(u) - E_L(u) = \begin{cases} F(iK) - E_a(i), & i \in [1, a-1] \\ F(u), & \text{其它} \end{cases} \tag{19}$$

由(19)式可以看出，复原图像频谱中只有当 u 为 K 的整数倍时，复原图像频谱才不等于原始图像频谱 $F(u)$，显然修正这些点的频谱，可以获得更准确的复原图像，以下给出两种修正方法。

(1) 内插法：

一般地，实际图像的频谱均为连续的，为了估计 $u = iK$ 处的频谱，可用其两边的频谱值代替，即

$$\hat{F}(ik) = \frac{1}{2}[\hat{F}(ik-1) + \hat{F}(ik+1)] \quad i \in [1, a-1]$$

而 $\hat{F}(ik-1)$ 和 $\hat{F}(ik+1)$ 值与原始图像频谱相同。由数值计算理论可知，这样的内插从均方误差意义讲是合理的。

(2) 补偿法：

由(19)式知，复原图像频谱与原始图像频谱的误差完全由 $E_a(u)$ 决定，而 $E_a(u)$ 则是由于对初始值 $\Phi(i)$ 估计不准确造成，从上节误差分析的第 3 点讨论可知初始值的一种估计为

$$\hat{\Phi}(i) = A - \frac{1}{K}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{k=0}^{m} g'(i+ka) \tag{20}$$

式中 $A = g[(m+1)a-1] - \dfrac{Q(m)}{a}$，(16)式减去(20)式，得误差函数

$$e(i) = \Phi(i) - \hat{\Phi}(i) = \frac{1}{K}\sum_{m=0}^{k-1} f(i+ma) - A \quad i \in [0, a-1] \tag{21}$$

令 A 的 DFT 变换为 $\tilde{A}(u)$，而上式第一项当 K 较大时，可近似为 f 的平均值 $\bar{f}$，且

$$\bar{f} = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} f(n) = \frac{1}{L}F(0) = \frac{1}{L}\hat{F}(0)$$

对(21)式两边做 DFT 变换，并令 $\dfrac{1}{L}\hat{F}(0)$ 的 DET 变换为 $\tilde{F}(u)$，则

$$E_a(u) = \tilde{F}(u) - \tilde{A}(u) \quad u \in [0, a-1]$$

所以在 $\hat{F}(u)$ 中补偿上 $\tilde{F}(u) - \tilde{A}(u)$ 可能得到更好的复原图像。

2. 空间域误差改善方法

独立像素族：复原图像中误差相同的像素点集合称为一像素族，由于不同族像素相互独立，故称其为独立像素族。

复原图像应该满足 $0 \leqslant \hat{f}(n) \leqslant 255$ 的约束。

递推步骤①：先找出像素最小值小于零的所有族，将最小值上移到零，并将其负值部分平均分配给像素最小值大于零的所有族，将所涉各族所有像素作相应下移或上移以保持 $\sum_{i=0}^{a-1} e(i) = 0$ 的约束；然后在作下移的那些族中找出像素最小值小于零的所有族，将其负值部分平均分配给像素最小值大于零的那些族，最小值发生变动的族的所有像素作相应下移或上移，循环进行该过程直至所有各族像素的最小值皆不小于零为止，参照文献[4]证明只需经过有限次循环即可完成该过程。并且该过程带来复原图像与原始图像误差的减小，经过该过程的 $f(n)$ 满足大于等于零的下界约束。

递推步骤②：为了使复原图像满足 $0 \leqslant f(n) \leqslant 255$ 的上界约束，类似于①的递推过程，把像素最大值超过 255 得所有族经有限次分配后，可使各族像素最大值不超过 255。

参照文献[4]可知，经过①②两步骤后得到的复原图像中误差已有减少。

三、实验结果简述

实验中处理的降质图像为计算机模拟的图片，目的只是检验理论的正确性。封二图 1

给出了水平方向匀速运动降质图像，运动点数为 16，占图像宽度的 1/16。图 2a 为采用逆滤波复原的图像，图 3a 为采用状态空间法复原的图像，复原模型初始状态定为零向量，图 4a 为差分法复原图像，采用了 Sondhi 估计初值。可以发现，图 2a，3a，4a 中存在着程度不同的周期性误差。图 2b 为图 2a 经内插法频域误差改进后得到的图像，图 3b 是图 3a 经空间域误差改进过的复原图像；图 4b 为图 4a 经空间域误差改进后的图像。仔细观察这些图片，可以发现误差改进后的图像中周期性误差均已明显减小，这样得到的复原图像质量均较好，这说明误差改进对提升复原图像质量具有普遍意义。

参 考 文 献

[1] 刘政凯、瞿建雄，数字图像恢复与重建，中国科技大学出版社，1989.

[2] D. Slepian: Restoration of photographs blurred by image motion, *BSTJ*, Vol. 46, Dec. 1967.

[3] M. M. Sondhi: Image Restoration: The Removal of Spatially invariant degradations *Proc. IEEE*, Vol. 60, July 1972.

[4] 李汉、王延平：利用代数约束法复原匀速直线运动降质图像，信号处理，Vol.2，No.3，Sep.t1986.

MSE IMPROVED METHODS IN RESTORING IMAGES DEGRADED BY UNIFORM MOTION

Zhu Yu Wang Chuntao Liu Zhengkai

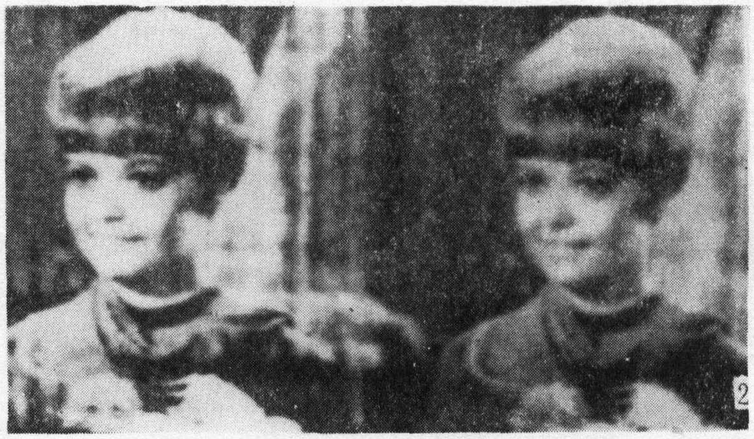
(Department oj Radio Electronics, University of Science and Technology of China)

Abstract

Periodic error commonly appear in restoring uniform motion blurred picture, its appearance degrade the quality of restored image heavily. In this paper, quantitative error analysis of restored image in accordance with several typical restored methods is described. Based on this analysis, two MSE improved methods respe tively from frequency domain & space-domain are given. Experiment results show that these two methods have universal significance in the removal of periodic error disturbance in restored images.

Key words Image Restoration Periodic Erro MSE Improved Methods

图 1 运动降质图像



(a) (b)

图 2 逆滤波复原图像及频域误差改善

(a) (b)

图 3 状态空间法复原图像及空间域误差改善

(a) (b)

图 4 差分法复原图像及空间域误差改善